DST n$^{\text{o}}$2

Mathématiques - 23 Novembre 2024 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 5 exercices tous indépendants.

Exercice 1 - Échauffement

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = \mathrm{e} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_n^3}{\sqrt{u_{n+1}}}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$.

2. Justifier que la suite (v_n) est bien définie.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = -\frac{1}{2}v_{n+1} + 3v_n$.
4. En déduire qu'il existe quatre réels A, B, r_1, r_2, dont on précisera les valeurs, tels que pour tout entier n :
$$u_n = A^{r_1^n} \times B^{r_2{}^n}$$

Exercice 2 - Calculs de sommes

Les 4 questions de cet exercices sont toutes indépendantes.

1. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$ et tout entier $n \geq p$, on a
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
Indication : fixer $p \geq 0$ quelconque et raisonner par récurrence sur n.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{3k+1}}{2^{2k}}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3k-2)^2$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in]0, 1[$ un réel.
   (a) Montrer que si k est un entier appartenant à $\{1, ..., n\}$, on a
   $$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$.

Exercice 3 - Somme de deux parties de $\mathbb{R}$

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble somme de A et B, noté $A + B$, comme l'ensemble des réels qui peuvent s'écrire comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B. On a donc :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

1. Donner l'ensemble $A + B$ dans le cas où $A = \{-2, 2\}$ et $B = \{1, 4\}$

2. Déterminer l'ensemble $A+B$ dans le cas où $A=[-2,2]$ et $B=]1,4]$. Une justification est attendue.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Montrer que $A+\mathbb{R}=\mathbb{R}$.
4. Supposons que $A \subset C$ et $B \subset D$, avec A, B, C, D quatre parties non vides de $\mathbb{R}$.
   Montrer que $A+B \subset C+D$.
5. Soient A, B, C trois parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que $(A+C) \cup (B+C) = (A \cup B) + C$.
6. Supposons que A et B soient majorés. Alors A et B admettent une borne supérieure, respectivement notée $\sup A$ et $\sup B$.
   (a) Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$
   (b) Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $f(A+B)=f(A)+f(B)$
   (b) Montrer que $f^{-1}(A)+f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A+B)$.

Exercice 4 - Un peu de probabilités

Un joueur de basket s'entraîne à tirer des lancers francs. On admet que

- La probabilité qu'il réussisse le premier lancer est de $0,1$.
- S'il réussit un lancer, la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à $0,8$.
- S'il rate un lancer, la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement « le joueur marque le n-ème lancer »
- p_n la probabilité de l'événement G_n : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(G_n)$.

1. Calculer p_2 (on donnera la réponse sous forme de fraction irréductible).
2. On suppose que le joueur a marqué au deuxième lancer. Exprimer la probabilité qu'il ait raté le premier sous forme de fraction irréductible.
3. Calculer la probabilité que le joueur marque au moins un panier sur les trois premiers lancers.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$. On pourra représenter la situation par un arbre de probabilité.
5. Montrer qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$, dont on précisera la valeur, tel que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = p_n - a$ soit une suite géométrique.
6. En déduire une expression du terme général de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.
7. Déterminer la limite de la suite (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 - Étude d'une suite récurrente et d'une suite implicite

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = nx - \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Les trois parties sont pratiquement indépendantes les unes des autres, seule la définition des fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ reste la même.

Partie I

1. La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative d'une fonction f si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, la droite d'équation $y = nx - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ en $+\infty$.

   (b) Montrer que pour $n \geq 1$, la courbe $\mathcal{C}_n$ admet une deuxième asymptote oblique en $-\infty$ dont on déterminera une équation.

2. (a) Justifier que la fonction f_n est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_n'(x)$.

   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \leq 1$.

   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ (on distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$).

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I d'abscisse 0.

4. Représenter graphiquement dans un même repère les deux courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_2$.

Partie II

On considère dans cette partie la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_0(u_n)$$

5. Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \leq 0$.

6. (a) Montrer que pour tout réel $h > 0$ on a

$$\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \leq \frac{\mathrm{e}^h + 1}{2}$$

   Indication : on pourra faire l'étude de la fonction $\varphi : h \mapsto h\,\mathrm{e}^h + h - 2\,\mathrm{e}^h + 2$ que l'on dérivera deux fois.

   (b) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\left|\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y}\right| \leq \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y) \qquad (1)$$

   (c) Montrer que pour tous réels x, y **de même signe** on a :

$$2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y) \leq (1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y) \qquad (2)$$

   (d) Déduire des inégalités (1) et (2) que pour tous réels x, y **de même signe** on a :

$$|f_0(x) - f_0(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

7. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \leq 0$.

8. Montrer que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

9. En déduire que pour tout entier naturel n : $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Partie III

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

11. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

    (b) On admet que $\dfrac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} < 1,47$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.

12. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$.

    (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

    (c) Que peut-on en déduire sur la suite $(x_n)_{n\geq 2}$?

13. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2\,\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)$$

    (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.